آزمون جامع (۱)

۱. گزینهٔ «۲»

با توجه به سؤال می‌بایست نامعادلهٔ $f(x) \geq y$ را حل کنیم، پس:

$$\frac{2x-1}{x+1}-\frac{x-1}{2x+1} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(2x-1)(2x+1)-(x-1)(x+1)}{(x+1)(2x+1)} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(4x^2-1)-(x^2-1)}{(x+1)(2x+1)} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3x^2}{(x+1)(2x+1)} \geq \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2}$$

$$\frac{6x^2}{(x+1)(2x+1)} \geq 1 \Rightarrow \frac{6x^2}{(x+1)(2x+1)}-1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{6x^2-(x+1)(2x+1)}{(x+1)(2x+1)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{6x^2-(2x^2+3x+x+1)}{(x+1)(2x+1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{4x^2-3x-1}{(x+1)(2x+1)} \geq 0$$

$$\begin{cases} 4x^2-3x-1=0 \xrightarrow{a+b+c=0} x=1, x=\frac{c}{a}=\frac{-1}{4} \\ (x+1)(2x+1)=0 \Rightarrow x=-1, x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

حال جدول تعیین علامت را تشکیل می‌دهیم:

x		-1		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$		1	
عبارت	+	ت‌ن	−	ت‌ن	+	0	−	0	+

پس جواب نامعادله به صورت بازه‌ی:

$(-\infty,-1) \cup (-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}] \cup [1,+\infty)$ است که با توجه به بازه‌ی $(-\infty,a)$ که در سؤال آمده است a باید برابر (-1) باشد.

۲. گزینهٔ «۱»

کافی است نامعادلهٔ $(m-2)x^2+m > 3x-2$ را حل کنیم، لذا داریم:

$$(m-2)x^2-3x+2+m > 0 \Rightarrow$$

نامعادلهٔ به‌دست آمده یک نامعادلهٔ پارامتری درجهٔ دوم است و می‌دانیم شرط آن‌که سه جمله‌ای درجهٔ دوم ax^2+bx+c همواره مثبت باشد آن است که $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$، پس:

$$\begin{cases} a=m-2>0 \Rightarrow m>2 \ (1) \\ \Delta=(-3)^2-4(m-2)(m+2)<0 \Rightarrow 9-4(m^2-4)<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9-4m^2+16<0 \Rightarrow -4m^2+25<0 \Rightarrow 25<4m^2$$

$$\Rightarrow m^2>\frac{25}{4} \Rightarrow m>\frac{5}{2} \cup m<-\frac{5}{2} \ (2)$$

با در نظر گرفتن اشتراک موارد (۱) و (۲) داریم:

$$\xrightarrow{(1)\cap(2)} m>\frac{5}{2}$$

۳. گزینهٔ «۱»

در حل نامعادلات همواره می‌توان از عبارت‌های مثبت صرف‌نظر کرد. در نامعادلهٔ داده‌شده عبارت $(x^2+\sqrt{2}x+2)$ همواره مثبت است، زیرا Δی این معادله منفی بوده و می‌دانیم که در عبارت‌های درجهٔ دو اگر $\Delta<0$ باشد، علامت سه جمله‌ای همواره موافق علامت a است و چون در این جا $a>0$ است پس علامت سه جمله‌ای هم مثبت می‌شود، لذا:

$$\underbrace{(x^2+\sqrt{2}x+2)}_{\text{مثبت}}(x^2-4) \leq 0 \Rightarrow x^2-4 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

۴. گزینهٔ «۳»

اصلاحیه: در پاسخ‌نامه کلیدی به اشتباه گزینهٔ «۴» خورده.

در عبارت داده شده در صورت عبارت $|x-1|$ و در مخرج $|x|$ همواره نامنفی‌اند، پس با فرض $x \neq 0$ (ریشهٔ مخرج) می‌توان در تعیین علامت این دو عبارت را از صورت و مخرج حذف نمود و فقط x را تعیین علامت نمود. پس جدول به‌صورت

x		0	
	−		+

است. که این جدول در مورد گزینه (۳) هم صادق است. دقت کنید که گزینه ۱ چون شرط $x \neq 0$ را ندارد، جواب نیست.

۵. گزینهٔ «۲»

هرگاه $\frac{x}{x-2}$ را برابر t در نظر بگیریم داریم:

$$t+\frac{1}{t}+2 \leq 0 \Rightarrow t+\frac{1}{t} \leq -2$$

و می‌دانیم که مجموع دو عدد معکوس موقعی کوچک‌تر یا مساوی (-2) می‌شود که آن عدد منفی باشد یعنی t باید منفی باشد، پس:

$$t<0 \Rightarrow \frac{x}{x-2}<0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} 0<x<2$$

۶. گزینهٔ «۳»

روش اول:

می‌دانیم‌که: $u^2 \leq a^2 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} -a \leq u \leq a$، پس:

$$(x-1)^2<4 \Rightarrow -2<x-1<2 \xrightarrow{+1} -1<x<3 \qquad (1)$$

می‌دانیم که:

$$\begin{cases} x \geq 2: |x-2|=x-2 \\ x<2: |x-2|=-x+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x-5<|x-2| \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \Rightarrow 2x-5<x-2 \\ \Rightarrow x<3 \xrightarrow{x \geq 2} 2 \leq x<3 \qquad (2) \\ \text{یا} \\ x<2 \Rightarrow 2x-5<-x+2 \Rightarrow \\ 3x<7 \Rightarrow x<\frac{7}{3} \xrightarrow{x<2} x<2 \qquad (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(2)\text{یا}(3)} x<3 \ (4)$$

جواب نهایی: $(1) \cap (4) \Rightarrow -1<x<3$

روش دوم: با توجه به گزینه‌ها $x=0$ را در نامعادلات قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} |x-2|<4 \xrightarrow{x=0} 2<4 \ \checkmark \\ 2x-5<|x-2| \xrightarrow{x=0} -5<2 \ \checkmark \end{cases}$$

پس $x=0$ جزء جواب می‌باشد، لذا گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند، برای رد گزینه (۱) یا (۳) کافیست $x=2/5$ را بررسی نماییم.

$$2x-5<|x-2| \Rightarrow 2 \times 2/5-5<|2/5-2| \Rightarrow 0<0/5 \ \checkmark$$

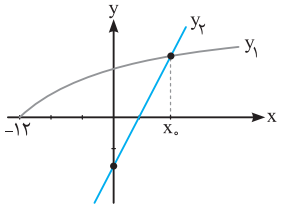
پس $x=2/5$ هم باید جزء جواب باشد، پس جواب صحیح گزینه‌ی «۳» است.

۷. گزینهٔ «۲»

در این سؤال فقط تعداد ریشه مورد سؤال واقع‌شده است، پس بهترین روش رسم نمودار است، لذا ابتدا معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$2x-\sqrt{x+12}=4 \Rightarrow \underbrace{2x-4}_{y_1}=\underbrace{\sqrt{x+12}}_{y_2}$$

حال نمودار تابع y_1 و y_2 را در یک دستگاه مختصات می‌کشیم و نقاط تلاقی آن‌ها را می‌یابیم:



با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که دو تابع در نقطه‌ای با طول x_0 که مثبت است همدیگر را قطع می‌کنند، پس معادله یک ریشهٔ مثبت دارد.

۸. گزینهٔ «۴»

روش اول:

$$\frac{x^2-3x+2}{2x^2-x+1}>\frac{3}{4}$$

چون Δی مخرج منفی است $(\Delta=1-4\times2\times1<0)$ و ضریب x^2 هم مثبت است پس سه جمله‌ای درجه‌ی دوم مخرج همواره مثبت است، پس به همین دلیل در اینجا می‌توانیم طرفین وسطین کنیم:

$$4(x^2-3x+2)>3(2x^2-x+1)$$
$$\Rightarrow 4x^2-12x+8>6x^2-3x+3$$
$$\Rightarrow -2x^2-9x+5>0$$
$$\Rightarrow -2x^2-9x+5=0\Rightarrow$$
$$\Delta=81-4\times(-2)(5)=81+40=121\Rightarrow\sqrt{\Delta}=11$$
$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{9\pm11}{2(-2)}\longrightarrow$$
$$\begin{cases}x=-5\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}-5<x<\frac{1}{2}$$

روش دوم: با توجه به گزینه‌ها ابتدا $x=0$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$$\frac{0-0+2}{0-0+1}>\frac{3}{4}\Rightarrow 2>\frac{3}{4}\ \checkmark$$

پس $x=0$ باید جزء جواب باشد، لذا گزینه‌های (۲) و (۳) حذف می‌شوند. برای انتخاب گزینه‌ی صحیح بین گزینه‌های (۱) و (۴) کافی است $x=-2$ را در نامعادله قرار دهیم:

$$\frac{(-2)^2-3(-2)+2}{2(-2)^2-(-2)+1}>\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{4+6+2}{8+2+1}>\frac{3}{4}\Rightarrow$$
$$\frac{12}{11}>\frac{3}{4}\Rightarrow 12\times4>3\times11\Rightarrow 48>33\ \checkmark$$

پس $x=-2$ هم باید جزء جواب باشد، لذا گزینه (۱) هم رد می‌شود.

۹. گزینهٔ «۳»

اصلاحیه: گزینه‌ی (۳) در صورت سوال به صورت $(-1,4)-\{1\}$ است.

Δی عبارت (x^2-x+7) منفی بوده، پس این سه جمله‌ای همواره مثبت است از طرفی داریم:

$$\frac{|2x-4|(x^2-x+7)}{\{(x-1)(x+1)\}\{(x-1)(x-4)\}}<0\Rightarrow$$
$$\frac{\overbrace{|2x-4|(x^2-x+7)}^{\text{همواره مثبت}}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\text{همواره مثبت}}\ (x+1)(x-4)}<0$$
$$\Rightarrow(x+1)(x-4)<0\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}-1<x<4\ ,\ x\neq1$$

روش دوم: عددگذاری

۱۰. گزینهٔ «۴»

Δی مخرج منفی است، پس مخرج همواره مثبت است، لذا می‌توانیم طرفین وسطین کنیم:

$$\frac{3x^2-2x+2}{x^2+x+1}<2\Rightarrow 3x^2-2x+2<2x^2+2x+2$$
$$\Rightarrow x^2-4x<0\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}0<x<4$$

پس بازهٔ (a,b) همان بازهٔ $(0,4)$ بوده و لذا بیشترین مقدار $b-a$ برابر (۴) است.

آزمون جامع (۲)

۱. گزینهٔ «۳»

روش اول: به طرفین نامعادله ۴ اضافه می‌کنیم:

$$\sqrt{2-x}-4+4>x^2-4x+4\Rightarrow\sqrt{2-x}>(2-x)^2$$
$$\Rightarrow\sqrt{2-x}>(\sqrt{2-x})^4\Rightarrow\sqrt{2-x}-(\sqrt{2-x})^4>0$$
$$\Rightarrow\underbrace{\sqrt{2-x}}_{\text{همواره مثبت}}\,(1-(\sqrt{2-x})^3)>0\Rightarrow1-(\sqrt{2-x})^3>0$$
$$\Rightarrow1>(\sqrt{2-x})^3\Rightarrow1>2-x$$
$$\Rightarrow x>1\ (1)$$

از طرفی با توجه به دامنه‌ی $\sqrt{2-x}$ هم داریم:

$$2-x\geq0\Rightarrow x\leq2\ (2)\xrightarrow{(1)\cap(2)}1<x\leq2$$

از طرفی $x=2$ در نامعادله صدق نمی‌کند، زیرا به $(-4>-4)$ می‌رسیم پس جواب نهایی به صورت زیر است:

$$x\in(1,2)$$

روش دوم:

با توجه به گزینه‌ها، ابتدا $x=1/5$ را در نامعادله بررسی می‌کنیم:

$$\sqrt{2-x}-4>x^2-4x\xrightarrow{x=\frac{3}{2}}\sqrt{2-\frac{3}{2}}-4>\frac{9}{4}-6$$
$$\xrightarrow{+6}\sqrt{\frac{1}{2}}+2>\frac{9}{4}\Rightarrow\sqrt{\frac{1}{2}}>\frac{9}{4}-2\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{4}\ \checkmark$$

پس $x=1/5$ جزء جواب باید باشد، لذا گزینه‌های (۲) و (۴) حذف می‌شوند. برای انتخاب گزینهٔ صحیح بین گزینه‌های (۱) و (۳) کافی است $x=1$ را بررسی نماییم:

$$\xrightarrow{x=1}\sqrt{2-1}-4>1-4\Rightarrow1>1\ \text{غ‌ق‌ق}$$

پس $x=1$ جزء جواب نیست و در نتیجه گزینهٔ (۳) پاسخ صحیح است.

۲. گزینهٔ «۲»

روش اول:

$$\frac{2x\cancel{(x-2)}}{(x+1)\cancel{(x-2)}}<1\xrightarrow{x\neq2}\frac{2x}{x+1}<1\Rightarrow\frac{2x}{x+1}-1<0\Rightarrow$$
$$\frac{2x-x-1}{x+1}<0\Rightarrow\frac{x-1}{x+1}<0\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}-1<x<1$$

روش دوم: عددگذاری: $x=1$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$$\frac{2-4}{1-1-2}<1\Rightarrow\frac{-2}{-2}<1\Rightarrow1<1\rightarrow\text{غ‌ق‌ق}$$

پس $x=1$ جزء جواب نیست لذا (۲) یا (۳) پاسخ صحیح است. حال کافی است $x=0$ را بررسی کنیم:

$$\frac{0-0}{0-0-2}<1\Rightarrow0<1\ \checkmark$$

پس $x=0$ هم باید جزء جواب باشد و در نتیجه گزینهٔ (۳) هم حذف می‌شود.

۳. گزینهٔ «۱»

$$\frac{(x^2-4x+4)\sqrt{x+1}}{x^2+x-2}<0\Rightarrow\frac{\overbrace{(x-2)^2\sqrt{x+1}}^{\text{همواره مثبت}}}{(x+2)(x-1)}<0$$
$$\Rightarrow(x+2)(x-1)<0$$
$$\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}-2<x<1\ (1)$$

از طرفی به خاطر وجود $\sqrt{x+1}$ می‌بایست:

$$x+1>0\Rightarrow x>-1\ (2)\xrightarrow{(1)\cap(2)}-1<x<1\Rightarrow|x|<1$$

روش دوم: عددگذاری

۴. گزینهٔ «۱»

$$\begin{cases}p(x)\geq0\Rightarrow x\in[-2,3]\ (1)\\ q(x)<0\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\ (2)\end{cases}$$
$$\xrightarrow{(1)\cap(2)}[-2,-1)\cup(1,3]$$

۵. گزینهٔ «۱»

برای این‌که نمودار تابع زیر محور xها واقع شود باید $y<0$ باشد، پس:

$$\frac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}<0\Rightarrow\frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{(x+2)}(x+3)}<0$$
$$\xrightarrow[(1)]{x\neq-2}\frac{x-1}{x+3}<0\xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}$$
$$-3<x<1\ (2)\xrightarrow{(1)\cap(2)}x\in(-3,1)-\{-2\}$$

۶. گزینهٔ «۲»

ابتدا از $\sqrt{x^2-1}$ فاکتور می‌گیریم:

$$\sqrt{x^2-1}\,(2x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2-1}=0\Rightarrow x=\pm1\\ 2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

ولی به ازای $x=\frac{1}{2}$، عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود، پس جزء جواب نمی‌باشد و معادله دارای ۲ ریشه است.

۷. گزینهٔ «۱»

ابتدا بین دو کسر، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{(x+3)+2(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3}{x^2-9}\Rightarrow\frac{3x-3}{\cancel{x^2-9}}=\frac{3}{\cancel{x^2-9}}\xrightarrow{x\neq\pm3}$$
$$3x-3=3\Rightarrow3x=6\Rightarrow x=2$$

۸. گزینهٔ «۲»

$$\sqrt{x^2+2x-3}=x-1\qquad(*)$$

چون $\sqrt{x^2+2x-3}$ همواره نامنفی است، پس باید $(x-1)$ هم نامنفی باشد، لذا:

$$x-1\geq0\Rightarrow x\geq1\ (1)$$

حال دو طرف معادلهٔ (*) را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^2+2x-3=(x-1)^2\Rightarrow x^2+2x-3=x^2-2x+1\Rightarrow4x=4$$
$$\Rightarrow x=1$$

پس معادله یک جواب دارد.

۹. گزینهٔ «۲»

باید $x=0$ در معادله صدق کند، پس:

$$3(0)^2-7(0)+\sqrt{3}k-1=0\Rightarrow\sqrt{3}k=1\Rightarrow k=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۰. گزینهٔ «۲»

$$(\frac{3^3}{2^3})^{2x-1}=2^{x+1}\div3^{x+1}\Rightarrow((\frac{3}{2})^3)^{2x-1}=(\frac{2}{3})^{x+1}$$
$$\Rightarrow(\frac{3}{2})^{6x-3}=((\frac{3}{2})^{-1})^{x+1}\Rightarrow(\frac{3}{2})^{6x-3}=(\frac{3}{2})^{-x-1}$$
$$\Rightarrow6x-3=-x-1\Rightarrow7x=2\Rightarrow x=\frac{2}{7}$$